MATEMÁTICA

1 CONJUNTOS NUMÉRICOS

Os números surgiram da necessidade de contar ou quantificar coisas ou objetos. Com o passar do tempo, foram adquirindo características próprias.

1.1 Números naturais

É o primeiro dos conjuntos numéricos. Representado pelo símbolo ℕ e formado pelos seguintes elementos:

ℕ = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, ... + ∞}

O símbolo ∞ significa infinito, o + quer dizer positivo, então +∞ quer dizer infinito positivo.

1.2 Números inteiros

Esse conjunto surgiu da necessidade de alguns cálculos não possuírem resultados, pois esses resultados eram negativos. Representado pelo símbolo ℤ e formado pelos seguintes elementos:

ℤ = {- ∞, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., + ∞}

1.2.1 Operações e propriedades dos números naturais e inteiros

As principais operações com os números naturais e inteiros são: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação (as quatro primeiras são também chamadas operações fundamentais).

1.2.1.1 Adição

Na adição, a soma dos termos ou das parcelas resulta naquilo que se chama **total**.

| 2 + 2 = 4

As propriedades da adição são:

- **Elemento neutro:** qualquer número somado ao zero tem como total o próprio número.

| 2 + 0 = 2

- **Comutativa:** a ordem dos termos não altera o total.

| 2 + 3 = 3 + 2 = 5

- **Associativa:** o ajuntamento de parcelas não altera o total.

| (2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5) = 10

1.2.1.2 Subtração

Operação contrária à adição é conhecida como diferença.

Os termos ou parcelas da subtração, assim como o total, têm nomes próprios:

M – N = P; em que M = minuendo, N = subtraendo e P = diferença ou resto.

| 7 – 2 = 5

Quando o subtraendo for maior que o minuendo, a diferença será negativa.

1.2.1.3 Multiplicação

É a soma de uma quantidade de parcelas fixas. O resultado da multiplicação chama-se produto. Os sinais que indicam a multiplicação são o × e o ·.

| 4 × 7 = 7 + 7 + 7 + 7 = 28
| 7 · 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 28

As propriedades da multiplicação são:

Elemento neutro: qualquer número multiplicado por 1 terá como produto o próprio número.

| 5 · 1 = 5

Comutativa: ordem dos fatores não altera o produto.

| 3 · 4 = 4 · 3 = 12

Associativa: o ajuntamento dos fatores não altera o resultado.

| 2 · (3 · 4) = (2 · 3) · 4 = 24

Distributiva: um fator em evidência multiplica todas as parcelas dentro dos parênteses.

| 2 · (3 + 4) = (2 · 3) + (2 · 4) = 6 + 8 = 14

Fique ligado

Na multiplicação existe jogo de sinais. Veja a seguir:

Parcela	Parcela	Produto
+	+	+
+	-	-
-	+	-
-	-	+

| 2 · (-3) = -6
| -3 · (-7) = 21

1.2.1.4 Divisão

É o inverso da multiplicação. Os sinais que indicam a divisão são: ÷, :, /.

| 14 ÷ 7 = 2
| 25 : 5 = 5
| 36/12 = 3

Fique ligado

Por ser o inverso da multiplicação, a divisão também possui o jogo de sinal.

1.3 Números racionais

Os números racionais são os números que podem ser escritos na forma de fração, são representados pela letra ℚ e podem ser escritos em forma de frações.

| $\mathbb{Q} = \frac{a}{b}$ (com b diferente de zero → b ≠ 0); em que a é o numerador e b é o denominador.

Pertencem também a este conjunto as dízimas periódicas (números que apresentam uma série infinita de algarismos decimais, após a vírgula) e os números decimais (aqueles que são escritos com a vírgula e cujo denominador são potências de 10).

Toda fração cujo numerador é menor que o denominador é chamada de fração própria.

1.3.1 Operações com números racionais

1.3.1.1 Adição e subtração

Para somar frações deve estar atento se os denominadores das frações são os mesmos. Caso sejam iguais, basta repetir o denominador e somar (ou subtrair) os numeradores, porém se os denominadores forem diferentes é preciso fazer o MMC (mínimo múltiplo comum) dos denominadores, constituindo novas frações equivalentes às frações originais e proceder com o cálculo.

MATEMÁTICA

$$\frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15} = \frac{22}{15}$$

1.3.1.2 Multiplicação

Multiplicar numerador com numerador e denominador com denominador das frações.

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{28}$$

1.3.1.3 Divisão

Para dividir frações, multiplicar a primeira fração com o inverso da segunda fração.

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

(Simplificado por 2)

Toda vez, que for possível, deve simplificar a fração até sua fração irredutível (aquela que não pode mais ser simplificada).

1.3.1.4 Potenciação

Se a multiplicação é a soma de uma quantidade de parcelas fixas, a potenciação é a multiplicação de uma quantidade de fatores fixos, tal quantidade indicada no expoente que acompanha a base da potência.

A potenciação é expressa por: $\mathbf{a}^n$, cujo **a** é a base da potência e o **n** é o expoente.

$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

Propriedades das potências:

$a^0 = 1$

$3^0 = 1$

$a^1 = a$

$5^1 = 5$

$a^{-n} = 1/a^n$

$2^{-3} = 1/2^3 = 1/8$

$a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$

$3^2 \cdot 3^3 = 3^{(2+3)} = 3^5 = 243$

$a^m : a^n = a^{(m-n)}$

$4^5 : 4^3 = 4^{(5-3)} = 4^2 = 16$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$(2^2)^4 = 2^{2 \cdot 4} = 2^8 = 256$

$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

$7^{2/3} = \sqrt[3]{7^2}$

Não confunda: $(a^m)^n \neq a^{m^n}$

Não confunda também: $(-a)^n \neq -a^n$.

1.3.1.5 Radiciação

É a expressão da potenciação com expoente fracionário.

A representação genérica da radiciação é: $\sqrt[n]{a}$; cujo **n** é o índice da raiz, o **a** é o radicando e $\sqrt{\ }$ é o radical.

Quando o índice da raiz for o 2 ele não precisa aparecer e essa raiz será uma raiz quadrada.

Propriedades das raízes:

$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a^m}) = a^{m/n}$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

$\sqrt[m]{a^m} = a = a^{m/m} = a^1 = a$

Racionalização: se uma fração tem em seu denominador um radical, faz-se o seguinte:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^2}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

1.3.2 Transformação de dízima periódica em fração

Para transformar dízimas periódicas em fração, é preciso atentar-se para algumas situações:

- Verifique se depois da vírgula só há a parte periódica, ou se há uma parte não periódica e uma periódica.
- Observe quantas são as casas periódicas e, caso haja, as não periódicas. Lembre-se sempre que essa observação só será para os números que estão depois da vírgula.
- Em relação à fração, o denominador será tantos 9 quantos forem as casas do período, seguido de tantos 0 quantos forem as casas não periódicas (caso haja e depois da vírgula). Já o numerador será o número sem a vírgula até o primeiro período menos toda a parte não periódica (caso haja).

$$0{,}6666... = \frac{6}{9}$$

$$0{,}36363636... = \frac{36}{99}$$

$$0{,}123333... = \frac{123 - 12}{900} = \frac{111}{900}$$

$$2{,}8888... = \frac{28 - 2}{9} = \frac{26}{9}$$

$$3{,}754545454... = \frac{3754 - 37}{990} = \frac{3717}{990}$$

1.3.3 Transformação de número decimal em fração

Para transformar número decimal em fração, basta contar quantas casas existem depois da vírgula; então o denominador da fração será o número 1 acompanhado de tantos zeros quantos forem o número de casas, já o numerador será o número sem a vírgula.

$$0{,}3 = \frac{3}{10}$$

$$2{,}45 = \frac{245}{100}$$

$$49{,}586 = \frac{49586}{1000}$$

1.4 Números irracionais

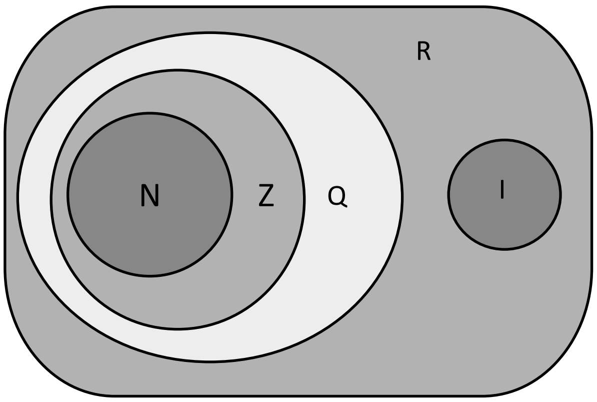
São os números que não podem ser escritos na forma de fração.

O conjunto é representado pela letra $\mathbb{I}$ e tem como elementos as dízimas não periódicas e as raízes não exatas.

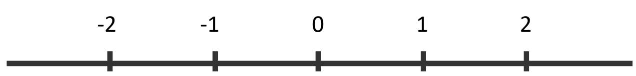
1.5 Números reais

Simbolizado pela letra $\mathbb{R}$, é a união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais.

Representado, temos:



Colocando todos os números em uma reta, temos:



As desigualdades ocorrem em razão de os números serem maiores ou menores uns dos outros.

Os símbolos das desigualdades são:

≥ maior ou igual a.

≤ menor ou igual a.

> maior que.

< menor que.

Dessas desigualdades surgem os intervalos, que nada mais são do que um espaço dessa reta, entre dois números.

Os intervalos podem ser abertos ou fechados, depende dos símbolos de desigualdade utilizados.

Intervalo aberto ocorre quando os números não fazem parte do intervalo e os sinais de desigualdade são:

> maior que.

< menor que.

Intervalo fechado ocorre quando os números fazem parte do intervalo e os sinais de desigualdade são:

≥ maior ou igual a.

≤ menor ou igual a.

1.6 Intervalos

Os intervalos numéricos podem ser representados das seguintes formas:

1.6.1 Com os símbolos <, >, ≤, ≥

Quando usar os símbolos < ou >, os números que os acompanham não fazem parte do intervalo real. Quando usar os símbolos ≤ ou ≥, os números farão parte do intervalo real.

> $2 < x < 5$: o 2 e o 5 não fazem parte do intervalo.
> $2 \leq x < 5$: o 2 faz parte do intervalo, mas o 5 não.
> $2 \leq x \leq 5$: o 2 e o 5 fazem parte do intervalo.

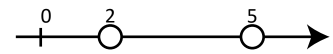
1.6.2 Com os colchetes [ ]

Quando os colchetes estiverem voltados para os números, significa que farão parte do intervalo. Quando os colchetes estiverem invertidos, significa que os números não farão parte do intervalo.

>]2;5[: o 2 e o 5 não fazem parte do intervalo.
> [2;5[: o 2 faz parte do intervalo, mas o 5 não faz.
> [2;5]: o 2 e o 5 fazem parte do intervalo.

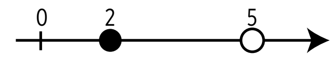
1.6.3 Sobre uma reta numérica

▹ **Intervalo aberto**

2<x<5: 

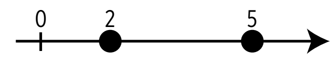
Em que 2 e 5 não fazem parte do intervalo numérico, representado pela marcação aberta (sem preenchimento - O).

▹ **Intervalo fechado e aberto**

2≤x<5: 

Em que 2 faz parte do intervalo, representado pela marcação fechada (preenchida●) em que 5 não faz parte do intervalo, representado pela marcação aberta (O).

▹ **Intervalo fechado**

2≤x≤5: 

Em que 2 e 5 fazem parte do intervalo numérico, representado pela marcação fechada (●).

1.7 Múltiplos e divisores

Os múltiplos são resultados de uma multiplicação de dois números naturais.

> Os múltiplos de 3 são: 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30... (os múltiplos são infinitos).

Os divisores de um número são os números, cuja divisão desse número por eles será exata.

> Os divisores de 12 são: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Fique ligado

Números quadrados perfeitos são aqueles que resultam da multiplicação de um número por ele mesmo.

> $4 = 2 \cdot 2$
> $25 = 5 \cdot 5$

1.8 Números primos

São os números que têm apenas dois divisores, o 1 e ele mesmo. (Alguns autores consideram os números primos aqueles que tem 4 divisores, sendo o 1, o -1, ele mesmo e o seu oposto – simétrico.)

> 2 (único primo par), 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, ...

Os números primos servem para decompor outros números.

A decomposição de um número em fatores primos serve para fazer o MMC e o MDC (máximo divisor comum).

1.9 MMC e MDC

O MMC de um, dois ou mais números é o menor número que, ao mesmo tempo, é múltiplo de todos esses números.

O MDC de dois ou mais números é o maior número que pode dividir todos esses números ao mesmo tempo.

Para calcular, após decompor os números, o MMC de dois ou mais números será o produto de todos os fatores primos, comuns e

MATEMÁTICA

não comuns, elevados aos maiores expoentes. Já o MDC será apenas os fatores comuns a todos os números elevados aos menores expoentes.

$6 = 2 \cdot 3$
$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2$
$35 = 5 \cdot 7$
$144 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^2$
$225 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 3^2 \cdot 5^2$
$490 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 = 2 \cdot 5 \cdot 7^2$
$640 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^7 \cdot 5$
MMC de 18 e 225 = $2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 2 \cdot 9 \cdot 25 = 450$
MDC de 225 e 490 = 5

Para saber a quantidade de divisores de um número basta, depois da decomposição do número, pegar os expoentes dos fatores primos, somar +1 e multiplicar os valores obtidos.

$225 = 3^2 \cdot 5^2 = 3^{2+1} \cdot 5^{2+1} = 3 \cdot 3 = 9$

Nº de divisores = $(2 + 1) \cdot (2 + 1) = 3 \cdot 3 = 9$ divisores. Que são: 1, 3, 5, 9, 15, 25, 45, 75, 225.

1.10 Divisibilidade

As regras de divisibilidade servem para facilitar a resolução de contas, para ajudar a descobrir se um número é ou não divisível por outro. Veja algumas dessas regras.

Divisibilidade por 2: para um número ser divisível por 2, ele tem de ser par.

14 é divisível por 2.
17 não é divisível por 2.

Divisibilidade por 3: para um número ser divisível por 3, a soma dos seus algarismos tem de ser divisível por 3.

174 é divisível por 3, pois 1 + 7 + 4 = 12.
188 não é divisível por 3, pois 1 + 8 + 8 = 17.

Divisibilidade por 4: para um número ser divisível por 4, ele tem de terminar em 00 ou os seus dois últimos números devem ser múltiplos de 4.

300 é divisível por 4.
532 é divisível por 4.
766 não é divisível por 4.

Divisibilidade por 5: para um número ser divisível por 5, ele deve terminar em 0 ou em 5.

35 é divisível por 5.
370 é divisível por 5.
548 não é divisível por 5.

Divisibilidade por 6: para um número ser divisível por 6, ele deve ser divisível por 2 e por 3 ao mesmo tempo.

78 é divisível por 6.
576 é divisível por 6.
652 não é divisível por 6.

Divisibilidade por 9: para um número ser divisível por 9, a soma dos seus algarismos deve ser divisível por 9.

75 é não divisível por 9.
684 é divisível por 9.

Divisibilidade por 10: para um número ser divisível por 10, ele tem de terminar em 0.

90 é divisível por 10.
364 não é divisível por 10.

1.11 Expressões numéricas

Para resolver expressões numéricas, deve-se seguir a ordem:

- Resolva os parênteses ( ), depois os colchetes [ ], depois as chaves { }, sempre nessa ordem.
- Dentre as operações, resolva primeiro as potenciações e raízes (o que vier primeiro), depois as multiplicações e divisões (o que vier primeiro) e, por último, as somas e subtrações (o que vier primeiro).

Calcule o valor da expressão:
$8 - \{5 - [10 - (7 - 3 \cdot 2)] \div 3\}$
$8 - \{5 - [10 - (7 - 6)] \div 3\}$
$8 - \{5 - [10 - (1)] \div 3\}$
$8 - \{5 - [9] \div 3\}$
$8 - \{5 - 3\}$
$8 - \{2\}$
6

2 SISTEMA LEGAL DE MEDIDAS

2.1 Medidas de tempo

A unidade padrão do tempo é o segundo (s), mas devemos saber as seguintes relações:

1min = 60s

1h = 60min = 3.600s

1 dia = 24h = 1.440min = 86.400s

30 dias = 1 mês

2 meses = 1 bimestre

6 meses = 1 semestre

12 meses = 1 ano

10 anos = 1 década

100 anos = 1 século

15h47min18s + 11h39min59s = 26h86min77s = 26h87min17s = 27h27min17s= 1 dia 3h27min17s.

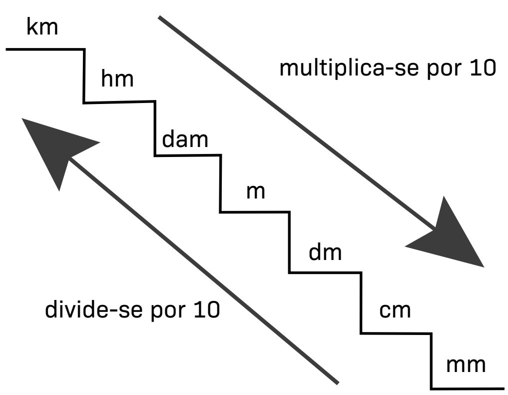
8h23min – 3h49min51s = 7h83min – 3h49min51s = 7h82min60s – 3h49min51s = 4h33min9s.

Cuidado com as transformações de tempo, pois elas não seguem o mesmo padrão das outras medidas.

2.2 Sistema métrico decimal

Serve para medir comprimentos, distâncias, áreas e volumes. Tem como unidade padrão o metro (m). Veja a seguir seus múltiplos, variações e algumas transformações.

Metro (m):



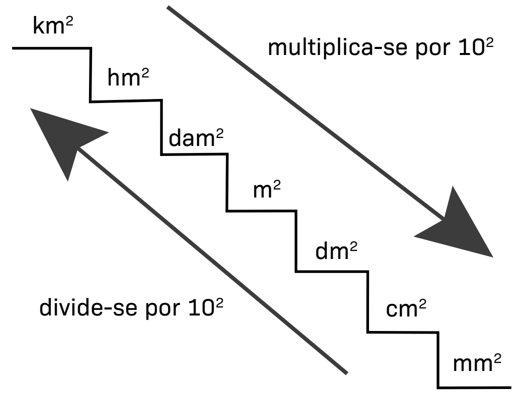
Ao descer um degrau da escada, multiplica-se por 10, e ao subir um degrau, divide-se por 10.

Transformar 2,98km em cm = 2,98 · 100.000 = 298.000cm (na multiplicação por 10 ou suas potências, basta deslocar a vírgula para a direita).

Transformar 74m em km = 74 ÷ 1.000 = 0,074km (na divisão por 10 ou suas potências, basta deslocar a vírgula para a esquerda).

Fique ligado
O grama (g) e o litro (l) seguem o mesmo padrão do metro (m).

Metro quadrado (m^2):

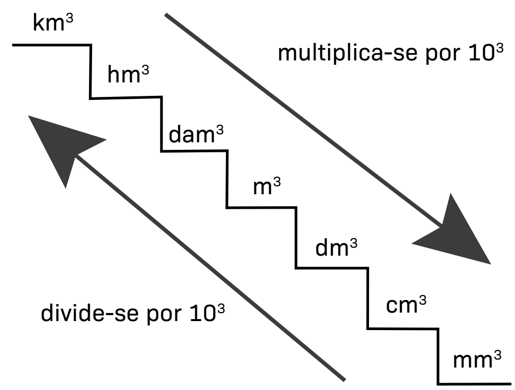


Ao descer um degrau da escada, multiplica por 10^2 ou 100, e ao descer um degrau, divide por 10^2 ou 100.

Transformar $79{,}11m^2$ em cm^2 = 79,11 · 10.000 = $791.100cm^2$.

Transformar $135m^2$ em km^2 = 135 ÷ 1.000.000 = $0{,}000135km^2$.

Metro cúbico (m^3):



Ao descer um degrau da escada, multiplica-se por 10^3 ou 1.000, e ao subir um degrau, divide-se por 10^3 ou 1.000.

Transformar $269dm^3$ em cm^3 = 269 · 1.000 = $269.000cm^3$.

Transformar $4.831cm^3$ em m^3 = 4.831 ÷ 1.000.000 = $0{,}004831m^3$.

O metro cúbico, por ser uma medida de volume, tem relação com o litro (l), e essa relação é:

$1m^3$ = 1.000 litros.

$1dm^3$ = 1 litro.

$1cm^3$ = 1 mililitro.

3 PROPORCIONALIDADE

Os conceitos de razão e proporção estão ligados ao quociente. Esse conteúdo é muito solicitado pelas bancas de concursos.

Primeiramente, vamos compreender o que é grandeza, em seguida, razão e proporção.

3.1 Grandeza

É tudo aquilo que pode ser contado, medido ou enumerado.

> Comprimento (distância), tempo, quantidade de pessoas e/ou coisas etc.

Grandezas diretamente proporcionais: são aquelas em que o aumento de uma implica o aumento da outra.

> Quantidade e preço.

Grandezas inversamente proporcionais: são aquelas em que o aumento de uma implica a diminuição da outra.

> Velocidade e tempo.

3.2 Razão

É a comparação de duas grandezas. Essas grandezas podem ser da mesma espécie (unidades iguais) ou de espécies diferentes (unidades diferentes). Nada mais é do que uma fração do tipo $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$.

Nas razões, os numeradores são também chamados de antecedentes e os denominadores de consequentes.

Escala: comprimento no desenho comparado ao tamanho real.

Velocidade: distância comparada ao tempo.

3.3 Proporção

É determinada pela igualdade entre duas razões.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Dessa igualdade, tiramos a propriedade fundamental das proporções: o produto dos meios igual ao produto dos extremos (a chamada multiplicação cruzada).

$$\boxed{b \cdot c = a \cdot d}$$

É basicamente essa propriedade que ajuda resolver a maioria das questões desse assunto.

Dados três números racionais a, b e c, não nulos, denomina **quarta proporcional** desses números um número x tal que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Proporção contínua é a que apresenta os meios iguais.

De um modo geral, uma proporção contínua pode ser representada por:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

As outras propriedades das proporções são:

Numa proporção, a soma dos dois primeiros termos está para o 2º (ou 1º) termo, assim como a soma dos dois últimos está para o 4º (ou 3º).

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \text{ ou } \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$$

Numa proporção, a diferença dos dois primeiros termos está para o 2º (ou 1º) termo, assim como a diferença dos dois últimos está para o 4º (ou 3º).

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \text{ ou } \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$$

Numa proporção, a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes, assim como cada antecedente está para o seu consequente.

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

Numa proporção, a diferença dos antecedentes está para a diferença dos consequentes, assim como cada antecedente está para o seu consequente.

$$\frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

Numa proporção, o produto dos antecedentes está para o produto dos consequentes, assim como o quadrado de cada antecedente está para quadrado do seu consequente.

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}$$

A última propriedade pode ser estendida para qualquer número de razões.

$$\frac{a \cdot c \cdot e}{b \cdot d \cdot f} = \frac{a^3}{b^3} = \frac{c^3}{d^3} = \frac{e^3}{f^3}$$

3.4 Divisão em partes proporcionais

Para dividir um número em partes direta ou inversamente proporcionais, devem-se seguir algumas regras.

- **Divisão em partes diretamente proporcionais**

> Divida o número 50 em partes diretamente proporcionais a 4 e a 6.
>
> $4x + 6x = 50$
>
> $10x = 50$
>
> $x = \frac{50}{10}$
>
> $x = 5$
>
> x = constante proporcional
>
> Então, $4x = 4 \cdot 5 = 20$ e $6x = 6 \cdot 5 = 30$
>
> Logo, a parte proporcional a 4 é o 20 e a parte proporcional ao 6 é o 30.

- **Divisão em partes inversamente proporcionais**

Divida o número 60 em partes inversamente proporcionais a 2 e a 3.

$$\frac{x}{2} = \frac{x}{3} = 60$$

$$\frac{3x}{6} + \frac{2x}{6} = 60$$

$5x = 60 \cdot 6$

$5x = 360$

$$x = \frac{360}{5}$$

$x = 72$

x = constante proporcional

Então, $\frac{x}{2} = \frac{72}{2} = 36$ e $\frac{x}{3} = \frac{72}{3} = 24$

Logo, a parte proporcional a 2 é o 36 e a parte proporcional ao 3 é o 24.

Perceba que, na divisão diretamente proporcional, quem tiver a maior parte ficará com o maior valor. Já na divisão inversamente proporcional, quem tiver a maior parte ficará com o menor valor.

3.5 Regra das torneiras

Sempre que uma questão envolver uma situação que pode ser feita de um jeito em determinado tempo (ou por uma pessoa) e, em outro tempo, de outro jeito (ou por outra pessoa), e quiser saber em quanto tempo seria se fosse feito tudo ao mesmo tempo, usa-se a regra da torneira, que consiste na aplicação da seguinte fórmula:

$$t_T = \frac{t_1 \cdot t_2}{t_1 + t_2}$$

Em que **T** é o tempo.

Quando houver mais de duas situações, é melhor usar a fórmula:

$$\frac{1}{t_T} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \ldots + \frac{1}{t_n}$$

Em que **n** é a quantidade de situações.

Uma torneira enche um tanque em 6h. Uma segunda torneira enche o mesmo tanque em 8h. Se as duas torneiras forem abertas juntas quanto tempo vão levar para encher o mesmo tanque?

$$t_T = \frac{6 \cdot 8}{6 + 8} = \frac{48}{14} = 3h25min43s$$

3.6 Regra de três

Mecanismo prático e/ou método utilizado para resolver questões que envolvem razão e proporção (grandezas).

3.6.1 Regra de três simples

Aquela que só envolve duas grandezas.

Durante uma viagem, um carro consome 20 litros de combustível para percorrer 240km, quantos litros são necessários para percorrer 450km?

Primeiro, verifique se as grandezas envolvidas na questão são direta ou inversamente proporcionais, e monte uma estrutura para visualizar melhor a questão.

Distância	Litro
240	20
450	x

Ao aumentar a distância, a quantidade de litros de combustível necessária para percorrer essa distância também vai aumentar, então, as grandezas são diretamente proporcionais.

$$\frac{20}{x} = \frac{240}{450}$$

Aplicando a propriedade fundamental das proporções:

$240x = 9.000$

$$x = \frac{9.000}{240} = 37{,}5 \text{ litros}$$

3.6.2 Regra de três composta

Aquela que envolve mais de duas grandezas.

Dois pedreiros levam nove dias para construir um muro com 2m de altura. Trabalhando três pedreiros e aumentando a altura para 4m, qual será o tempo necessário para completar esse muro?

Neste caso, deve-se comparar uma grandeza de cada vez com a variável.

Dias	Pedreiros	Altura
9	2	2
x	3	4

Note que, ao aumentar a quantidade de pedreiros, o número de dias necessários para construir um muro diminui, então as grandezas pedreiros e dias são inversamente proporcionais. No entanto, se aumentar a altura do muro, será necessário mais dias para construí-lo. Dessa forma, as grandezas muro e dias são diretamente proporcionais. Para finalizar, monte a proporção e resolva. Lembre-se que quando uma grandeza for inversamente proporcional à variável sua fração será invertida.

$$\frac{9}{x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{4}$$

$$\frac{9}{x} = \frac{6}{8}$$

Aplicar a propriedade fundamental das proporções:

$6x = 72$

$$x = \frac{72}{6} = 12 \text{ dias}$$

MATEMÁTICA

4 GEOMETRIA PLANA

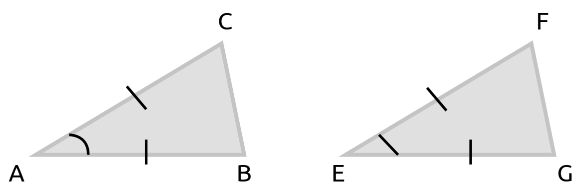
- **Ceviana:** são segmentos de reta que partem do vértice do triângulo para o lado oposto.
- **Mediana:** é o segmento de reta que liga um vértice deste triângulo ao ponto médio do lado oposto a este vértice. As medianas se encontram em um ponto chamado de baricentro.
- **Altura:** altura de um triângulo é um segmento de reta perpendicular a um lado do triângulo ou ao seu prolongamento, traçado pelo vértice oposto. As alturas se encontram em um ponto chamado ortocentro.
- **Bissetriz:** é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de duas retas concorrentes e, por consequência, divide um ângulo em dois ângulos congruentes. As bissetrizes se encontram em um ponto chamado incentro.
- **Mediatrizes:** são retas perpendiculares a cada um dos lados de um triângulo. As mediatrizes se encontram em um ponto chamado circuncentro.

4.1 Semelhanças de figuras

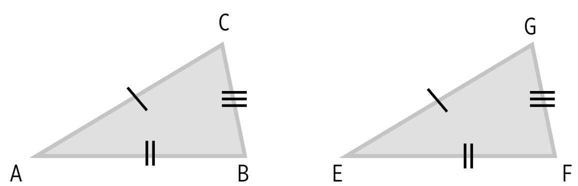
Duas figuras (formas geométricas) são semelhantes quando satisfazem a duas condições: os seus ângulos têm o mesmo tamanho e os lados correspondentes são proporcionais.

Nos triângulos existem alguns casos de semelhanças bem conhecidos:

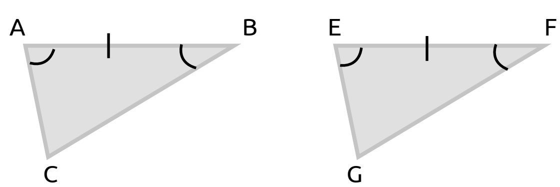
- **1º caso**: LAL (lado, ângulo, lado): dois lados congruentes e o ângulo entre esses lados também congruentes.



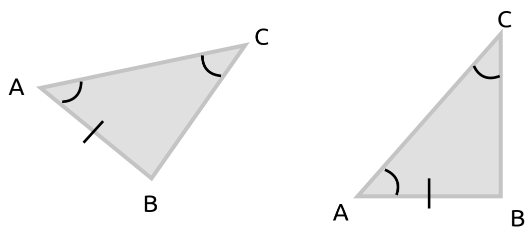
- **2º caso**: LLL (lado, lado, lado): os três lados congruentes.



- **3º caso:** ALA (ângulo, lado, ângulo): dois ângulos congruentes e o lado entre esses ângulos também congruentes.



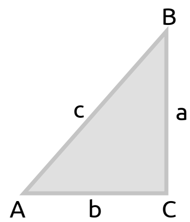
- **4º caso:** LAAo (lado, ângulo, ângulo oposto): congruência do ângulo adjacente ao lado, e congruência do ângulo oposto ao lado.



4.2 Relações métricas nos triângulos

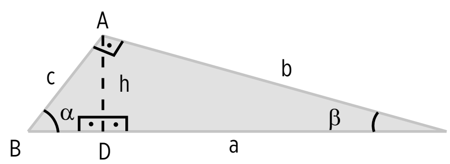
4.2.1 Triângulo retângulo e suas relações métricas

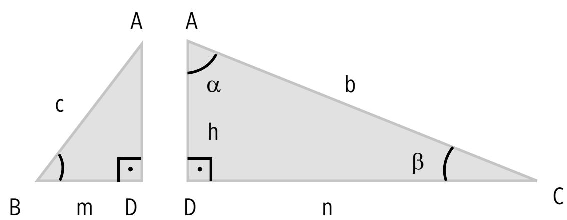
Denomina-se triângulo retângulo o triângulo que tem um de seus ângulos retos, ou seja, um de seus ângulos mede 90°. O triângulo retângulo é formado por uma hipotenusa e dois catetos, a hipotenusa é o lado maior, o lado aposto ao ângulo de 90°, e os outros dois lados são os catetos.



Na figura, podemos observar o triângulo retângulo de vértices A, B e C, e lados a, b e c. Como o ângulo de 90° está no vértice C, então a hipotenusa do triângulo é o lado c, e os catetos são os lados a e b.

Assim, podemos separar um triângulo em dois triângulos semelhantes:





Neste segundo triângulo, podemos observar uma perpendicular à hipotenusa até o vértice A; essa é a altura h do triângulo, separando a hipotenusa em dois segmentos, o segmento m e o segmento n, separando esses dois triângulos obtemos dois triângulos retângulos, o triângulo ΔABD e ΔADC. Como os ângulos dos três triângulos são congruentes, então podemos dizer que os triângulos são semelhantes.

Com essa semelhança, ganhamos algumas relações métricas entre os triângulos:

$$\frac{c}{a} = \frac{m}{c} \Rightarrow c^2 = am$$

$$\frac{c}{a} = \frac{h}{b} \Rightarrow cb = ah$$

$$\frac{b}{a} = \frac{n}{b} \Rightarrow b^2 = an$$

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow h^2 = mn$$

Da primeira e da terceira equação, obtemos:

$c^2 + b^2 = am + an = a\ (m + n)$.

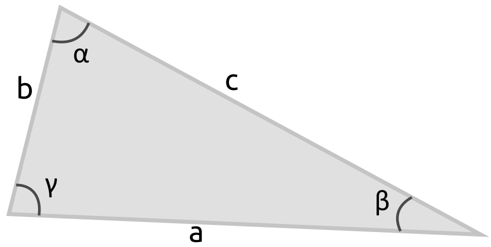
Como vimos na figura que m+n=a, então temos:

$c^2 + b^2 = aa = a^2$

ou seja, trata-se do Teorema de Pitágoras.

4.2.2 Lei dos cossenos

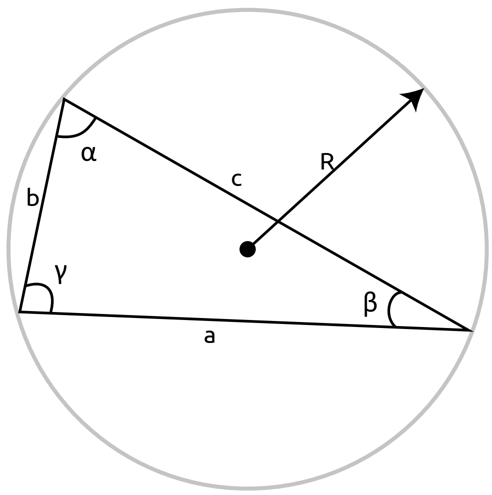
Para um triângulo qualquer demonstra-se que:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

Note que o lado a do triângulo é oposto ao cosseno do ângulo α.

4.2.3 Lei dos senos



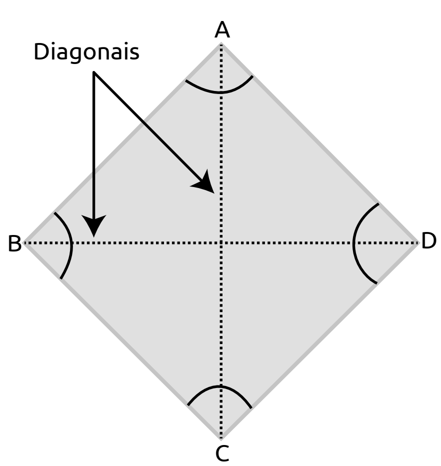
R é o raio da circunferência circunscrita a esse triângulo.

Neste caso, valem as seguintes relações, conforme a lei dos senos:

$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{\text{sen}\gamma} = 2R$$

4.3 Quadriláteros

Quadrilátero é um polígono de quatro lados. Eles possuem os seguintes elementos:



Vértices: A, B, C, e D.

Lados: AB, BC, CD, DA.

Diagonais: AC e BD.

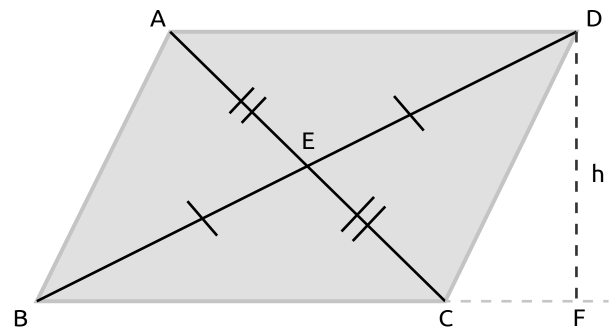
Ângulos internos ou ângulos do quadrilátero ABCD: $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$.

Todo quadrilátero tem duas diagonais.

O perímetro de um quadrilátero ABCD é a soma das medidas de seus lados, ou seja, AB + BC + CD + DA.

4.3.1 Quadriláteros importantes

- **Paralelogramo:** é o quadrilátero que tem os lados opostos paralelos.

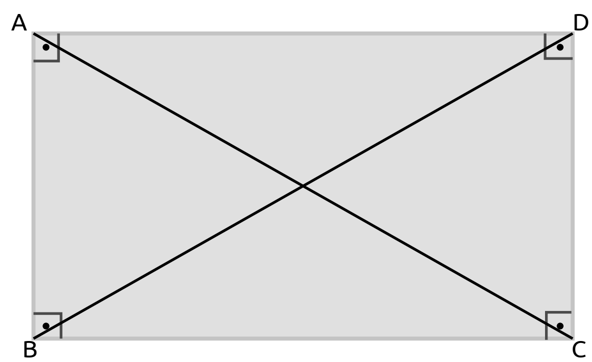


h é a altura do paralelogramo.

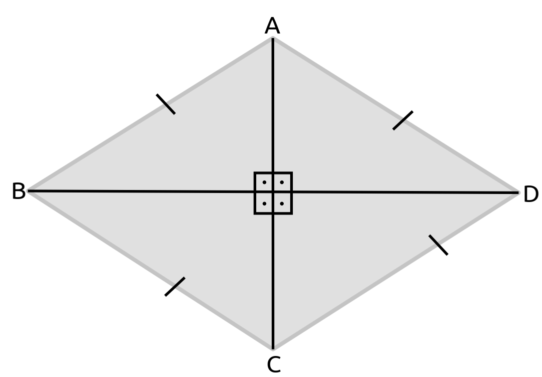
Em um paralelogramo:

- Os lados opostos são congruentes.
- Cada diagonal o divide em dois triângulos congruentes.
- Os ângulos opostos são congruentes.
- As diagonais interceptam-se em seu ponto médio.

- **Retângulo:** é o paralelogramo em que os quatro ângulos são congruentes (retos).

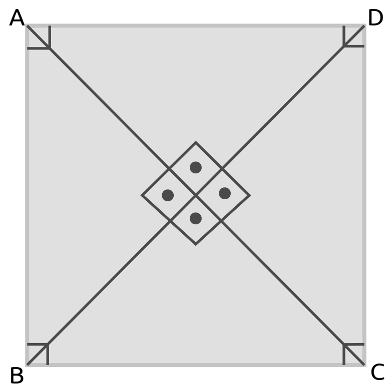


- **Losango**: é o paralelogramo em que os quatro lados são congruentes.

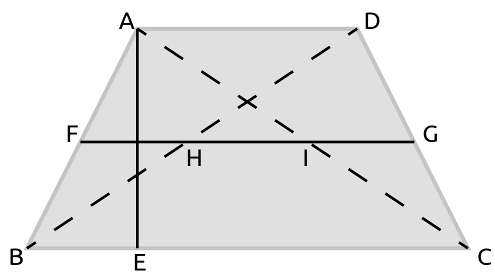


M A T E M Á T I C A

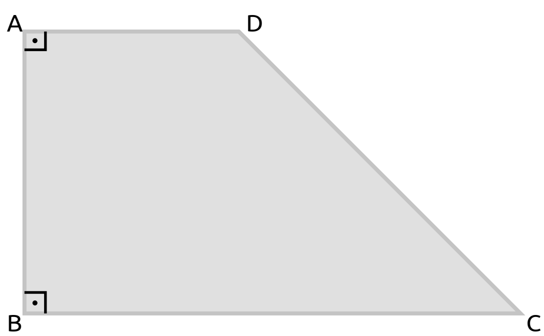
- **Quadrado**: é o paralelogramo em que os quatro lados e os quatro ângulos são congruentes.



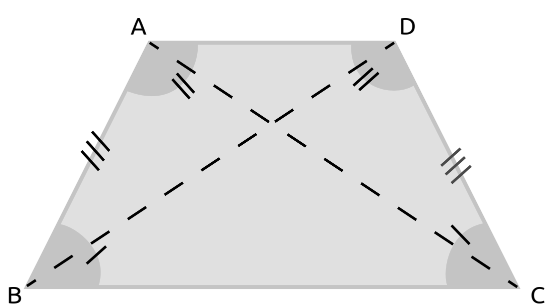
- **Trapézio:** é o quadrilátero que apresenta somente dois lados paralelos chamados bases.



  - **Trapézio retângulo:** é aquele que apresenta dois ângulos retos.



  - **Trapézio isósceles:** é aquele em que os lados não paralelos são congruentes.



4.4 Polígonos regulares

Um polígono é regular se todos os seus lados e todos os seus ângulos forem congruentes.

Os nomes dos polígonos dependem do critério que se utiliza para classificá-los. Usando **o número de ângulos** ou o **número de lados**, tem-se a seguinte nomenclatura:

Número de lados (ou ângulos)	Nome do Polígono	
	Em função do número de ângulos	Em função do número de lados
3	triângulo	trilátero
4	quadrângulo	quadrilátero
5	pentágono	pentalátero
6	hexágono	hexalátero
7	heptágono	heptalátero
8	octógono	octolátero
9	eneágono	enealátero
10	decágono	decalátero
11	undecágono	undecalátero
12	dodecágono	dodecalátero
15	pentadecágono	pentadecalátero
20	icoságono	icosalátero

Nos polígonos regulares cada ângulo externo é dado por:

$$e = \frac{360°}{n}$$

A soma dos ângulos internos é dada por:

$$S_i = 180 \cdot (n - 2)$$

E cada ângulo interno é dado por:

$$i = \frac{180\,(n - 2)}{n}$$

4.4.1 Diagonais de um polígono

O segmento que liga dois vértices não consecutivos de polígono é chamado de diagonal.

O número de diagonais de um polígono é dado pela fórmula:

$$d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

4.5 Círculos e circunferências

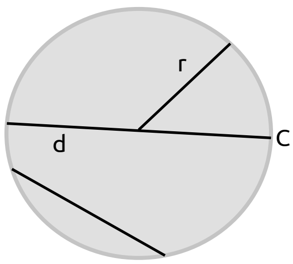
4.5.1 Círculo

É a área interna a uma circunferência.

4.5.2 Circunferência

É o contorno do círculo. Por definição, é o lugar geométrico dos pontos equidistantes ao centro.

A distância entre o centro e o lado é o raio.

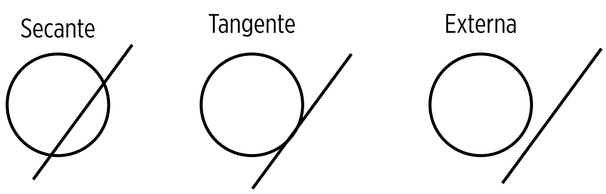


4.5.2.1 Corda

É o seguimento que liga dois pontos da circunferência.

A maior corda, ou corda maior de uma circunferência, é o diâmetro. Também dizemos que a corda que passa pelo centro é o diâmetro.

4.5.2.2 Posição relativa entre reta e circunferência



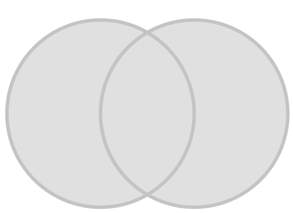
Uma reta é:

- **Secante:** distância entre a reta e o centro da circunferência é menor que o raio.
- **Tangente:** a distância entre a reta e o centro da circunferência é igual ao raio.
- **Externa:** a distância entre a reta e o centro da circunferência é maior que o raio.

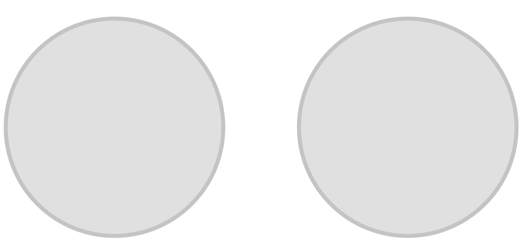
4.5.2.3 Posição relativa entre circunferência

As posições relativas entre circunferência são basicamente 5:

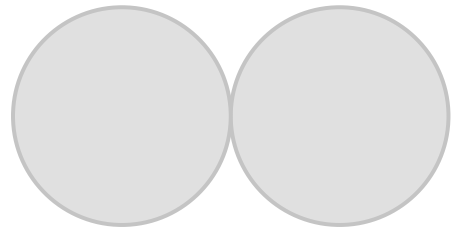
- ▹ **Circunferência secante:** a distância entre os centros é menor que a soma dos raios das duas, porém, é maior que o raio de cada uma.



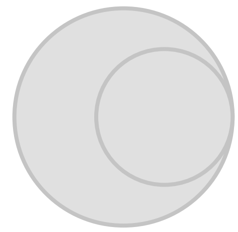
- ▹ **Externo:** a distância entre os centros é maior que a soma do raio.



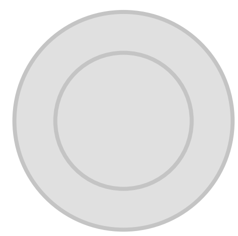
- ▹ **Tangente:** distância entre os centros é igual à soma dos raios.



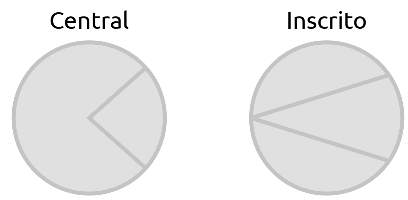
- ▹ **Interna:** distância entre os centros mais o raio da menor é igual ao raio da maior.



- ▹ **Interior:** distância entre os centros menos o raio da menor é menor que o raio da maior.



4.5.2.4 Ângulo central e ângulo inscrito



Um ângulo central sempre é o dobro do ângulo inscrito de um mesmo arco.

As áreas de círculos e partes do círculo são:

Área do círculo = $\pi \cdot r^2 = \frac{1}{4} \pi \cdot D^2$

Área do setor circular = $\pi \cdot r^2 = \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{1}{2} \alpha \cdot r^2$

Área da coroa = área do círculo maior – área do círculo menor

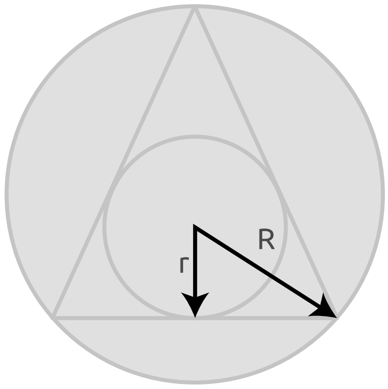
Fique ligado
Os ângulos podem ser expressos em graus (360° = 1 volta) ou em radianos (2π = 1 volta)

4.6 Polígonos regulares inscritos e circunscritos

As principais relações entre a circunferência e os polígonos são:

- Qualquer polígono regular é inscritível em uma circunferência.

- Qualquer polígono regular e circunscritível a uma circunferência.



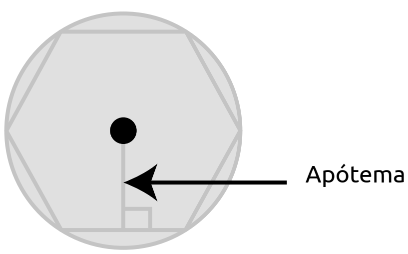
Polígono circunscrito a uma circunferência é o que possui seus lados tangentes à circunferência. Ao mesmo tempo, dizemos que esta circunferência está inscrita no polígono.

Um polígono é inscrito em uma circunferência se cada vértice do polígono for um ponto da circunferência, e neste caso dizemos que a circunferência é circunscrita ao polígono.

Da inscrição e circunscrição dos polígonos nas circunferências podem-se ter as seguintes relações:

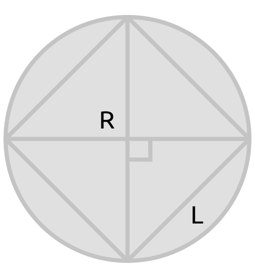
Apótema de um polígono regular é a distância do centro a qualquer lado. Ele é sempre perpendicular ao lado.

Nos polígonos inscritos:



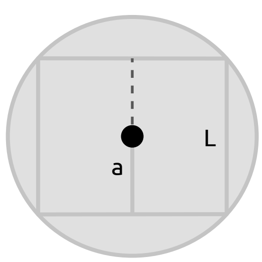
4.6.1 No quadrado

Cálculo da medida do lado (L):



$L = R\sqrt{2}$

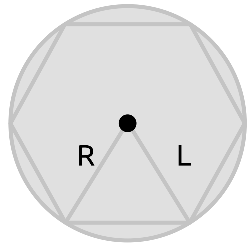
Cálculo da medida do apótema (a):



$a = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$

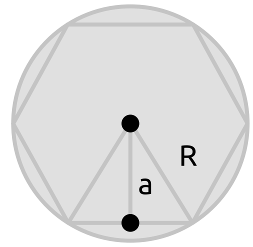
4.6.2 No hexágono

Cálculo da medida do lado (L):



$L = R$

Cálculo da medida do apótema (a):

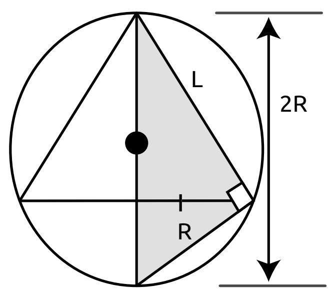


$a = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

4.6.3 No triângulo equilátero

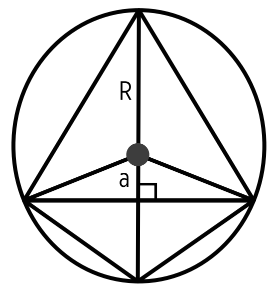
Nos polígonos circunscritos:

Cálculo da medida do lado (L):



$L = R\sqrt{3}$

Cálculo da medida do apótema (a):



$a = \dfrac{R}{2}$

4.6.4 No quadrado

Cálculo da medida do lado (L):

$L = 2R$

Cálculo da medida do apótema (a):

$a = R$

4.6.5 No hexágono

Cálculo da medida do lado (L):

$L = \dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$

Cálculo da medida do apótema (a):

$a = R$

4.6.6 No triângulo equilátero

Cálculo da medida do lado (L):

$L = 2R\sqrt{3}$

Cálculo da medida do apótema (a):

$a = R$

4.7 Perímetros e áreas dos polígonos e círculos

4.7.1 Perímetro

É o contorno da figura, ou seja, a soma dos lados da figura.

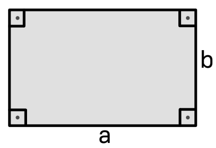
Para calcular o perímetro do círculo utilize: $P = 2\pi \cdot r$

4.7.2 Área

É o espaço interno, ou seja, a extensão que ela ocupa dentro do perímetro.

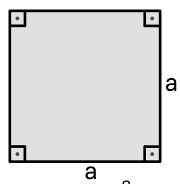
Principais áreas (S) de polígonos

Retângulo



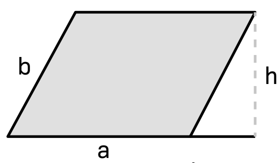
$$S = a \cdot b$$

Quadrado



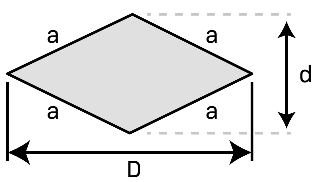
$$S = a^2$$

Paralelogramo



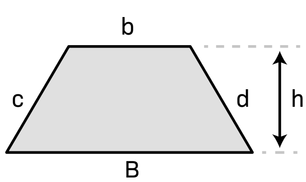
$$S = a \cdot h$$

Losango



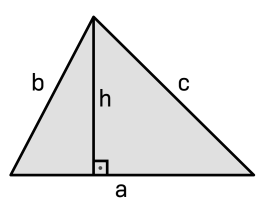
$$S = \frac{D \cdot d}{2}$$

Trapézio



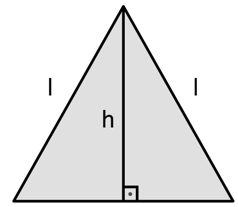
$$S = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Triângulo



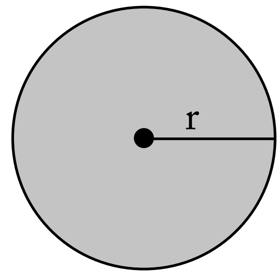
$$S = \frac{a \cdot h}{2}$$

Triângulo equilátero



$$S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

Círculo



$$S = \pi \cdot r^2$$

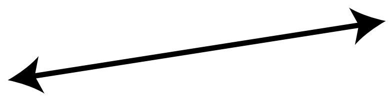
M A T E M Á T I C A

5 GEOMETRIA ESPACIAL

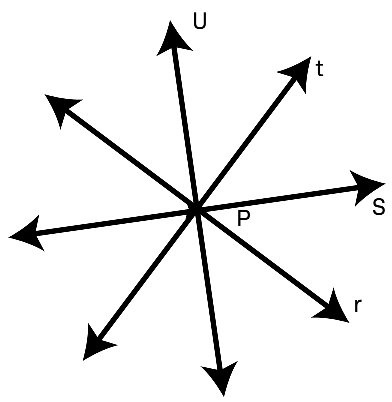
Neste capítulo, serão abordados os principais conceitos de geometria espacial e suas aplicações.

5.1 Retas e planos

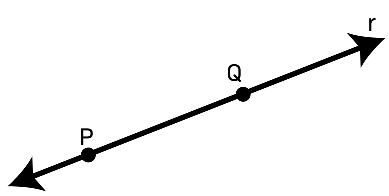
A reta é infinita, ou seja, contém infinitos pontos.



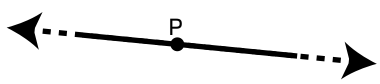
Por um ponto, podem ser traçadas infinitas retas.



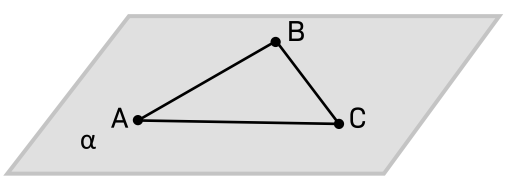
Por dois pontos distintos, passa uma única reta.



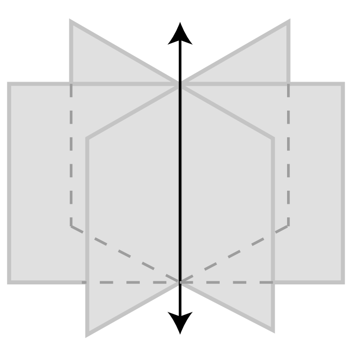
Um ponto qualquer de uma reta divide-a em duas semirretas.



Por três pontos não colineares, passa um único plano.



Por uma reta, pode ser traçada uma infinidade de planos.



5.1.1 Posições relativas de duas retas

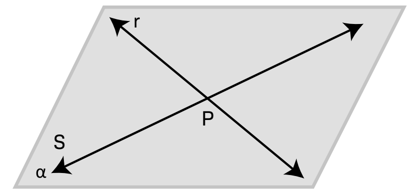
No espaço, duas retas distintas podem ser concorrentes, paralelas ou reversas:

Concorrentes

$r \cap s = \{ P \}$

$r \subset \alpha$

$s \subset \alpha$

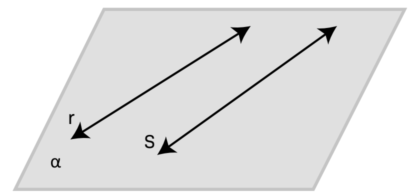


Paralelas

$r \cap s = \{ \}$

$r \subset \alpha$

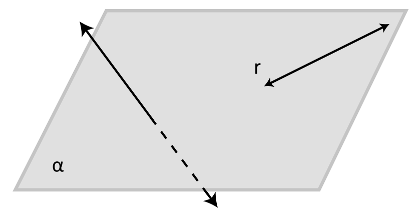
$s \subset \alpha$



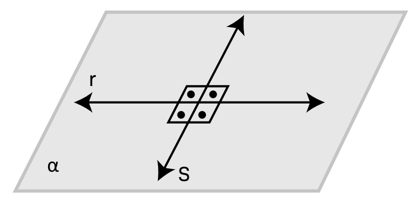
Concorrentes

$r \cap s = \{ \}$

Não existe plano que contenha r e s simultaneamente



Em particular nas retas concorrentes, há aquelas que são perpendiculares.

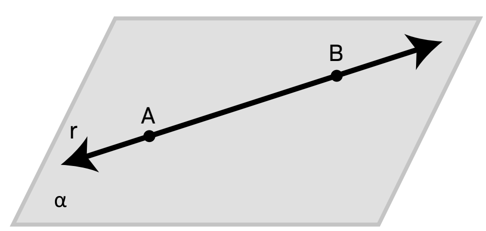


$r \perp s$

5.1.2 Posições relativas entre reta e plano

5.1.2.1 Reta contida no plano

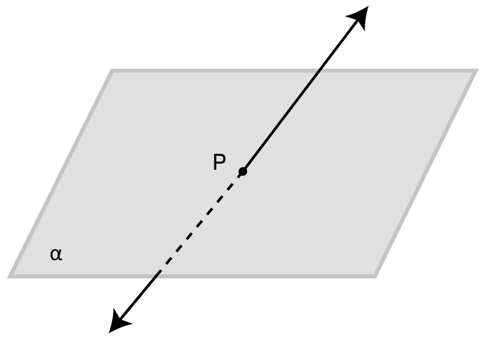
Se uma reta r tem dois pontos distintos num plano α, então, r está contida nesse plano:



$$\begin{matrix} A \in \alpha \text{ e } B \in \alpha \\ A \in r \text{ e } B \in r \end{matrix} \Rightarrow r \subset \alpha$$

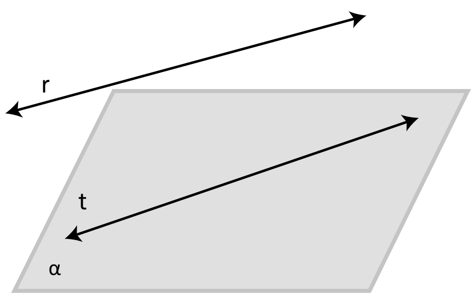
5.1.2.2 Reta concorrente ou incidente ao plano

Dizemos que a reta r fura o plano α ou que r e α são concorrentes em P quando $r \cap \alpha = \{ P \}$.



5.1.2.3 Reta paralela ao plano

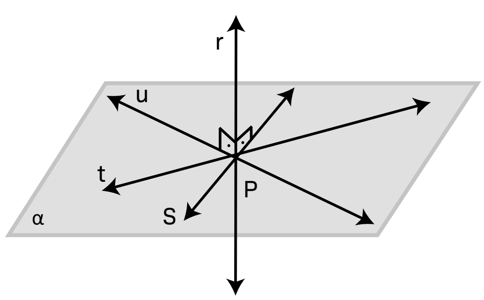
Se uma reta r e um plano α não tem ponto em comum, então, a reta r é paralela a uma reta t contida no plano α; portanto,
$r \,|\,|\, \alpha, \,|\,|\, t$ e $t \subset \alpha \Rightarrow r \,|\,|\, \alpha$



Se dois planos distintos têm um ponto em comum, então, a sua interseção é dada por uma única reta que passa por esse ponto.

5.1.3 Perpendicularismo entre reta e plano

Uma reta r é perpendicular a um plano α se, e somente se, r for perpendicular a todas as retas de α que passam pelo ponto de interseção de r e α.

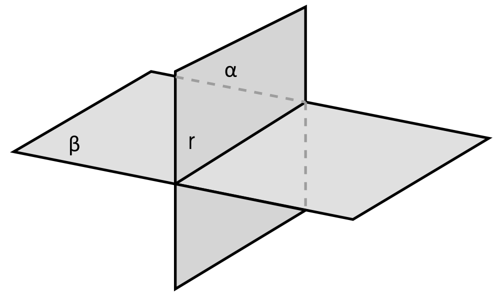


5.1.4 Posições relativas de dois planos

5.1.4.1 Planos coincidentes ou iguais

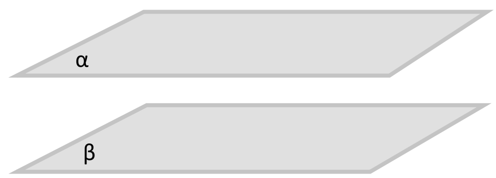
5.1.4.2 Planos concorrentes ou secantes

Dois planos, α e β, são concorrentes quando sua interseção é uma única reta:



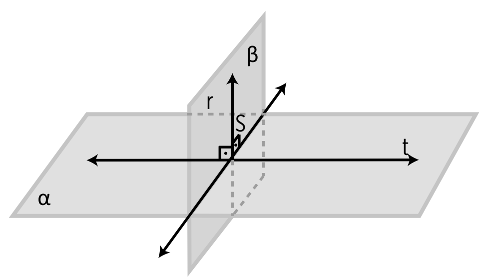
5.1.4.3 Planos paralelos

Dois planos, α e β, são paralelos quando sua interseção é vazia:



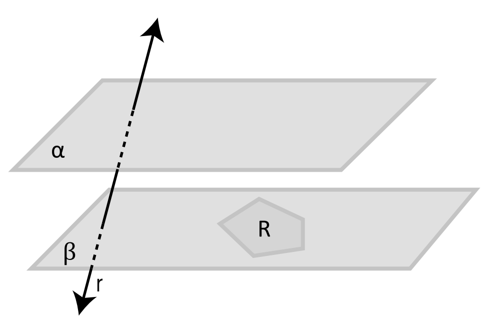
5.1.4.4 Perpendicularismo entre planos

Dois planos, α e β, são perpendiculares se existir uma reta de um deles que seja perpendicular ao outro:

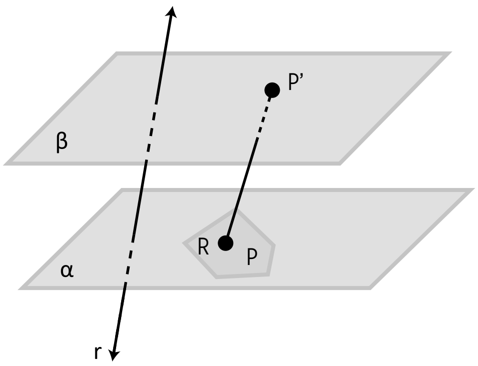


5.2 Prismas

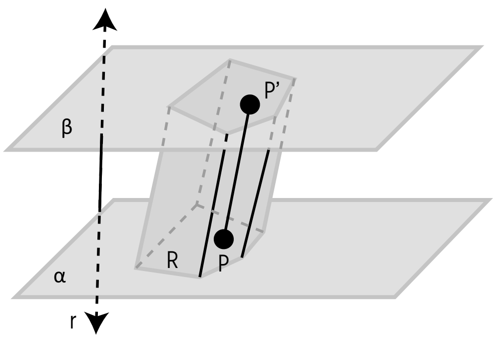
Na figura a seguir, temos dois planos paralelos e distintos, α e β, um polígono convexo R contido em α e uma reta r que intercepta α e β, mas não R:



Para cada ponto P da região R, vamos considerar o segmento $\overline{P'P}$, paralelo à reta r (P linha, pertence a Beta).



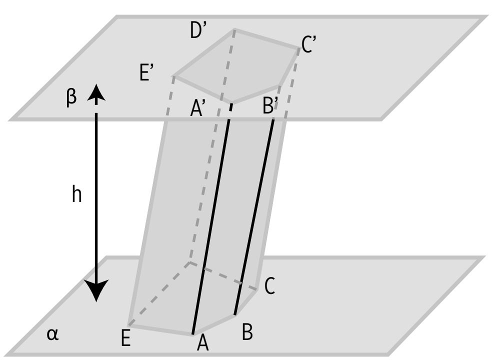
Assim, temos:



O conjunto de todos os segmentos congruentes $\overline{P'P}$ paralelos a r, é conhecido por prisma ou prisma limitado.

5.2.1 Elementos do prisma

Dado o prisma a seguir, considere os seguintes elementos:



Bases: as regiões poligonais R e S

Altura: a distância h entre os planos α e β

Arestas das bases:

Lados AB, BC, CD, DE, EA, A'B', B'C', D'E', E'A' (dos polígonos)

Arestas laterais:

Os segmentos AA', BB', CC', DD', EE'

Faces laterais: os paralelogramos AA'BB', BB'C'C, CC'D'D, DD'E'E, EE'A'A

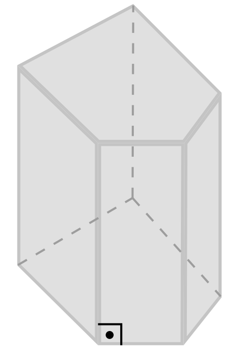
5.2.2 Classificação

Um prisma pode ser:

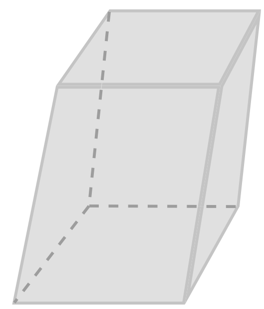
Reto: quando as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases.

Oblíquo: quando as arestas laterais são oblíquas aos planos das bases.

Prisma reto

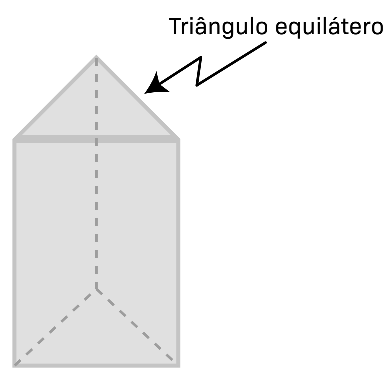


Prisma oblíquo

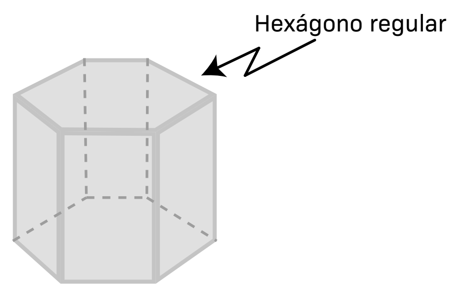


Prisma regular triangular

Chama-se de prisma regular todo prisma reto, cujas bases são polígonos regulares.



Prisma regular hexagonal



Fique ligado
As faces de um prisma regular são retângulos congruentes.

5.2.3 Áreas

Em um prisma distinguimos dois tipos de superfície: as faces e as bases. Assim, temos de considerar as seguintes áreas:

AL = n · AF (n = número de lados do polígono da base).

- **Área de uma face (AF):** área de um dos paralelogramos que constituem as faces.
- **Área lateral (AL):** soma das áreas dos paralelogramos que formam as faces do prisma.

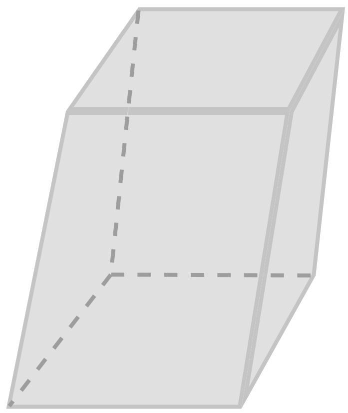
- **Área da base (AB):** área de um dos polígonos das bases.
- **Área total (AT):** soma da área lateral com a área das bases:

$$A_T = A_L + 2A_B$$

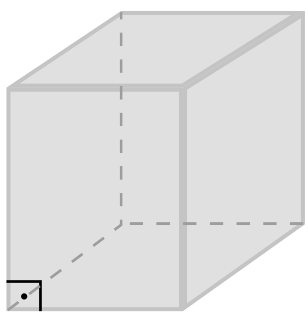
5.2.4 Paralelepípedo

Todo prisma cujas bases são paralelogramos recebe o nome de paralelepípedo.

Paralelepípedo oblíquo



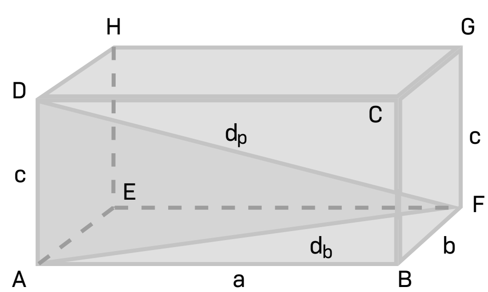
Paralelepípedo reto



Se o paralelepípedo reto tem bases retangulares, ele é chamado de paralelepípedo reto-retângulo, ortoedro ou paralelepípedo retângulo.

5.2.4.1 Paralelepípedo retângulo

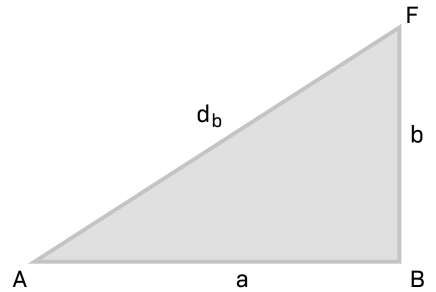
Diagonais da base e do paralelepípedo



db = diagonal da base

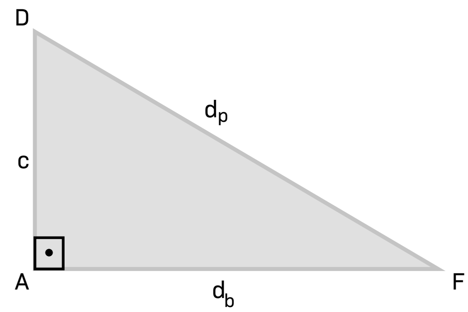
dp = diagonal do paralelepípedo

Na base, ABFE, tem-se:



$$d_b^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow d_b = \sqrt{a^2 + b^2}$$

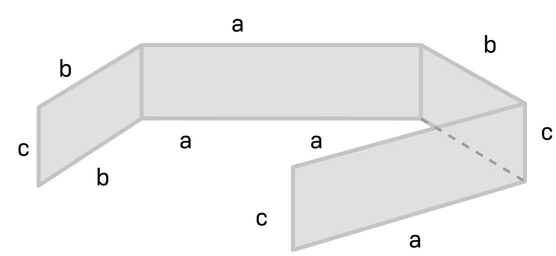
No triângulo AFD, tem-se:



$$d_p^2 = d_b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow d_p = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

5.2.4.2 Área lateral

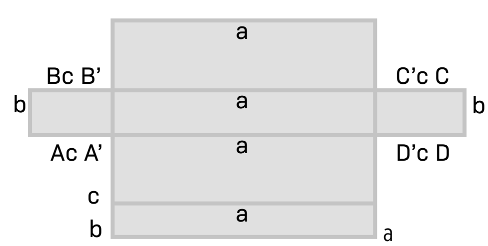
Sendo AL a área lateral de um paralelepípedo retângulo, tem-se:



$$A_L = ac + bc + ac + bc = 2ac + 2bc = A_L = 2(ac + bc)$$

5.2.4.3 Área total

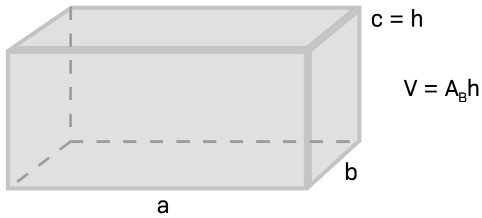
Planificando o paralelepípedo, verificamos que a área total é a soma das áreas de cada par de faces opostas:



$$A_T = 2(ab + ac + bc)$$

5.2.4.4 Volume

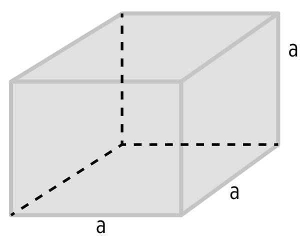
O volume de um paralelepípedo retângulo de dimensões a, b e c é dado por:



$V = a \cdot b \cdot c$

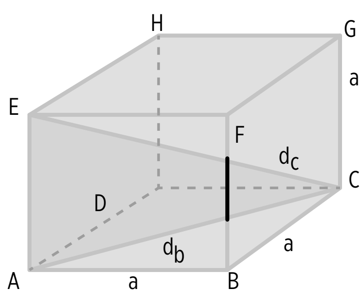
5.2.5 Cubo

Um paralelepípedo retângulo com todas as arestas congruentes (a = b = c) recebe o nome de cubo. Dessa forma, cada face é um quadrado.



Diagonais da base e do cubo

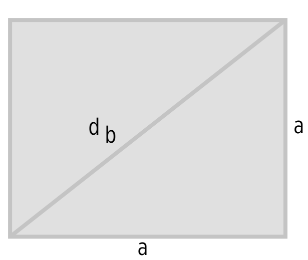
Considere a figura a seguir:



dc = diagonal do cubo

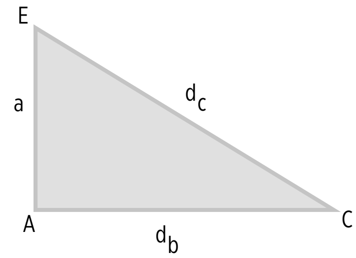
db = diagonal da base

Na base ABCD, tem-se:



$$d_c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow d_b = a\sqrt{2}$$

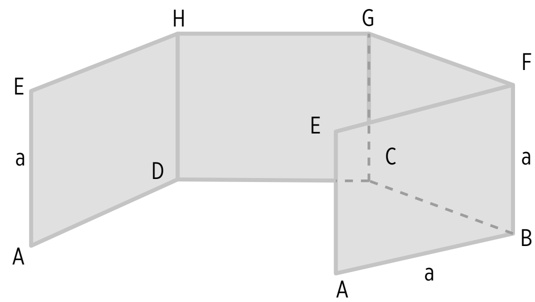
No triângulo ACE, tem-se:



$$d_c^2 = a^2 + d_b^2 = a^2 + 2\,a^2 = 3a^2 \Rightarrow d_b = a\sqrt{3}$$

5.2.5.1 Área lateral

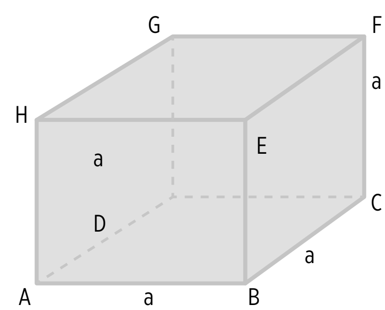
A área lateral AL é dada pela área dos quadrados de lado a:



$A_L = 4a^2$

5.2.5.2 Área total

A área total AT é dada pela área dos seis quadrados de lado a:



$A_T = 6a^2$

5.2.5.3 Volume

De forma semelhante ao paralelepípedo retângulo, o volume de um cubo de aresta a é dado por:

$V = a \cdot a \cdot a = a^3$

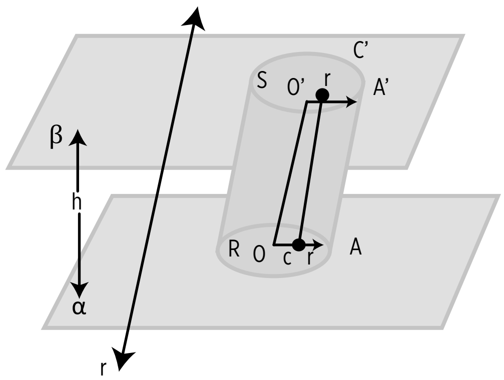
Generalização do volume de um prisma:

Vprisma = AB · h

5.3 Cilindro

5.3.1 Elementos do cilindro

Dado o cilindro a seguir, considere os seguintes elementos:



Bases: os círculos de centro O e O' e raios r.

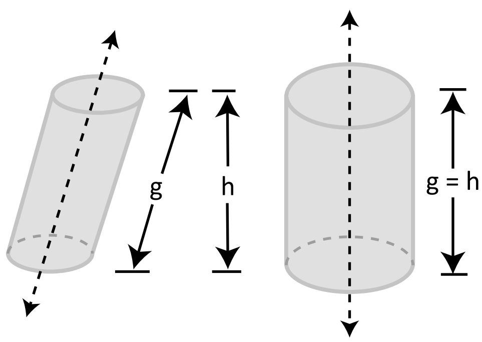
Altura: a distância h entre os planos α e β.

Geratriz: qualquer segmento de extremidades nos pontos das circunferências das bases (por exemplo, $\overline{AA'}$) e paralelo à reta r.

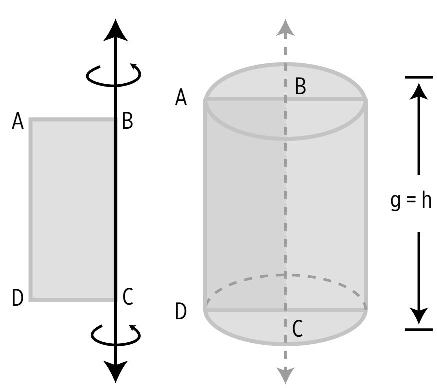
5.3.2 Classificação do cilindro

Um cilindro pode ser:

- **Circular oblíquo:** quando as geratrizes são oblíquas às bases.
- **Circular reto:** quando as geratrizes são perpendiculares às bases.



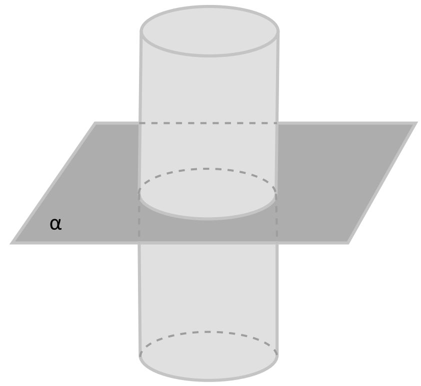
O cilindro circular reto é também chamado de cilindro de revolução, por ser gerado pela rotação completa de um retângulo por um de seus lados. Assim, a rotação do retângulo ABCD pelo lado $\overline{BC}$ gera o cilindro a seguir:



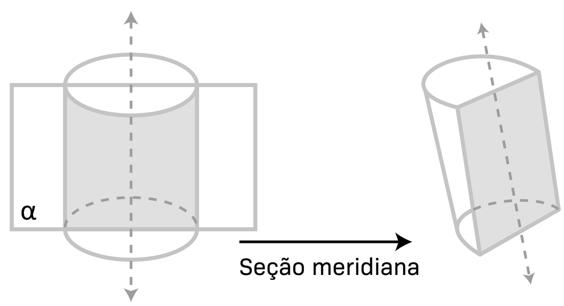
A reta $\overline{BC}$ contém os centros das bases e é o eixo do cilindro.

5.3.3 Seção

Seção transversal é a região determinada pela interseção do cilindro com um plano paralelo às bases. Todas as seções transversais são congruentes.



Seção meridiana é a região determinada pela interseção do cilindro com um plano que contém o eixo.

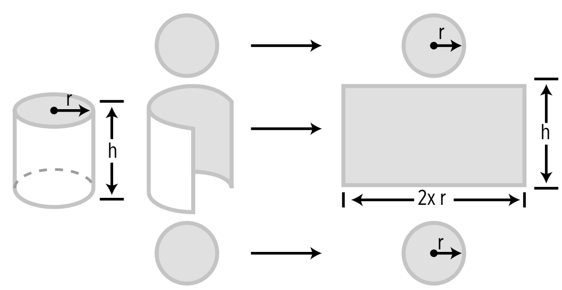


5.3.4 Áreas

Num cilindro, consideramos as seguintes áreas:

Área Lateral (AL)

Pode-se observar a área lateral de um cilindro fazendo a sua planificação:



Assim, a área lateral do cilindro reto cuja altura é h e cujos raios dos círculos das bases são r é um retângulo de dimensões 2 π r e h:

$$A_L = 2\,\pi r\,h$$

Área da base (AB): área do círculo de raio r:

$$A_B = 2\,\pi r^2$$

Área total (AT): soma da área lateral com as áreas das bases:

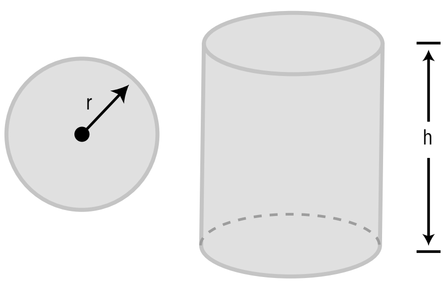
$$A_T = A_L + 2_{AB} = 2\pi\, r\, h + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(h + r)$$

5.3.5 Volume

O volume de todo paralelepípedo retângulo e de todo cilindro é o produto da área da base pela medida de sua altura:

$$V_{cilindro} = A_B \cdot h$$

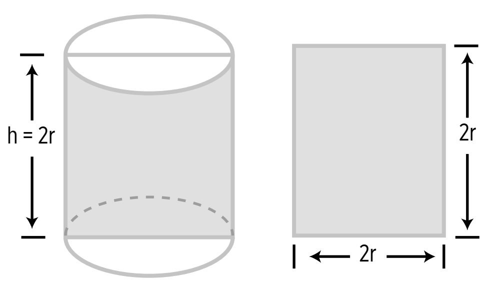
No caso do cilindro circular reto, a área da base é a área do círculo de raio r, AB = **π** r[1] h; portanto, seu volume é:



$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

5.3.6 Cilindro equilátero

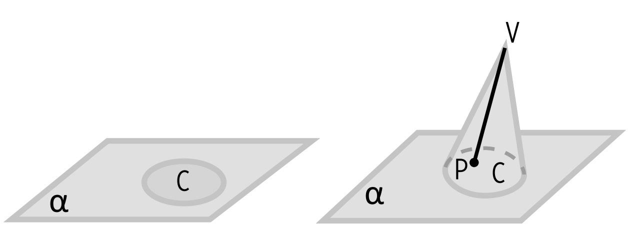
Todo cilindro cuja seção meridiana é um quadrado (altura igual ao diâmetro da base) é chamado cilindro equilátero.



$$A_L = 2r \cdot 2\pi r = 4\pi r^2$$
$$A_T = A_L + A_B = 4\pi r^2 + 2\pi r^2 = 6\pi r^2$$

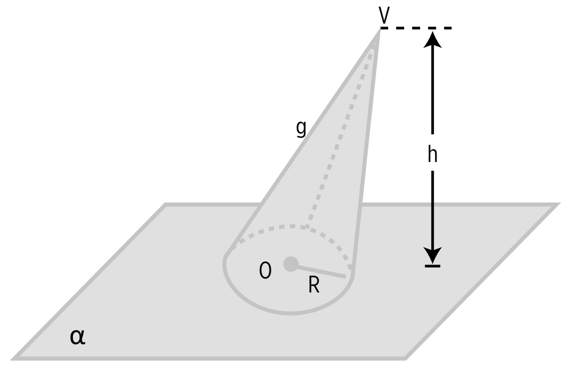
5.4 Cone circular

Dado um círculo C, contido num plano α, e um ponto V (vértice) fora de α, chamamos de cone circular o conjunto de todos os segmentos $\overline{VP}$, P ∈ C.



5.4.1 Elementos do cone circular

Dado o cone a seguir, consideramos os seguintes elementos:



Altura: distância h do vértice V ao plano α.

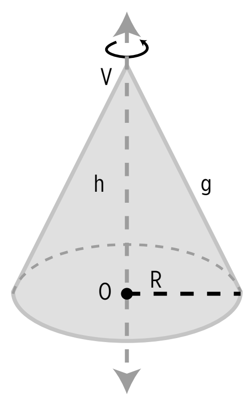
Geratriz (g): segmento com uma extremidade no ponto V e outra em um ponto da circunferência.

Raio da base: raio R do círculo.

Eixo de rotação: reta $\overline{VO}$ determinada pelo centro do círculo e pelo vértice do cone.

5.4.2 Cone reto

Todo cone cujo eixo de rotação é perpendicular à base é chamado cone reto, também denominado cone de revolução. Ele pode ser gerado pela rotação completa de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos.

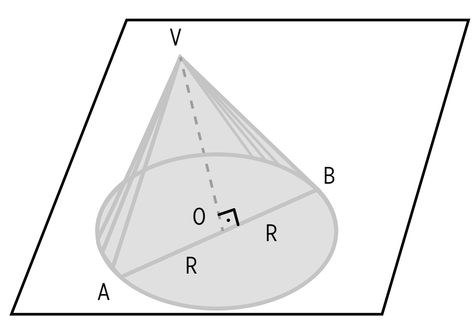


Da figura, e pelo Teorema de Pitágoras, temos a seguinte relação:

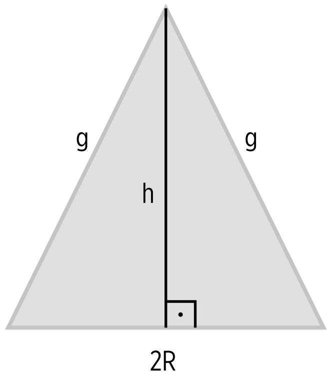
$$g^2 = h^2 + R^2$$

5.4.3 Seção meridiana

A seção determinada, em um cone de revolução, por um plano que contém o eixo de rotação é chamada seção meridiana.



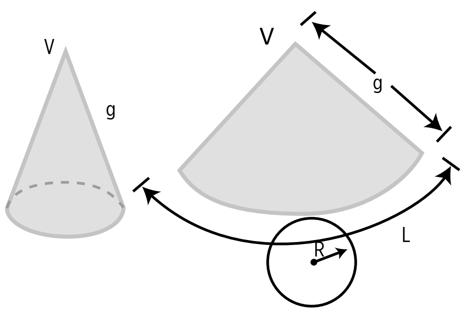
Se o triângulo AVB for equilátero, o cone também será equilátero:



$g = 2R$
$h = R\sqrt{3}$

5.4.4 Áreas

Desenvolvendo a superfície lateral de um cone circular reto, obtemos um setor circular de raio g e comprimento $L = 2\pi R$.



▹ **Assim, há de se considerar as seguintes áreas:**

Área lateral (AL): área do setor circular:

$$A_L = \frac{gl}{2} = \frac{g \cdot 2\pi R}{2} \Rightarrow A_L = \pi Rg$$

Área da base (AB): área do círculo do raio R:

$A_B = \pi R^2$

Área total (AT): soma da área lateral com a área da base:

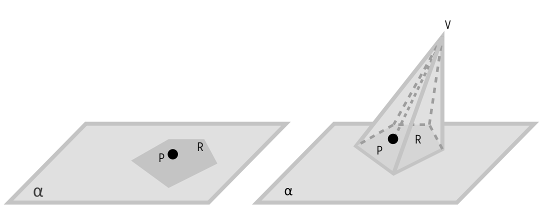
$A_T = A_L + A_B = \pi Rg + \pi R^2 \rightarrow A_T\ \pi R\,(g + R)$

5.4.5 Volume

$$V_{cone} = 2\ \pi dS = 2\pi\ \frac{r}{3} \cdot \frac{rh}{2} \Rightarrow V_{cone}\ \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h$$

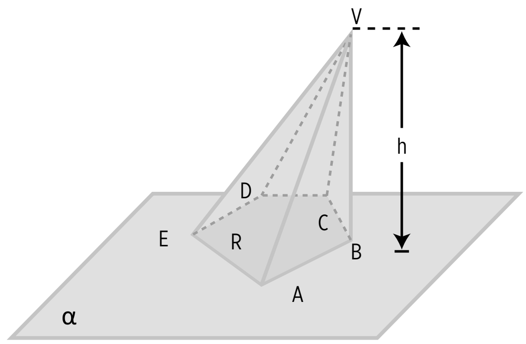
5.5 Pirâmides

Dado um polígono convexo R, contido em um plano α, e um ponto V (vértice) fora de α, chamamos de pirâmide o conjunto de todos os segmentos $\overline{VP}$, $P \in R$.



5.5.1 Elementos da pirâmide

Dada a pirâmide a seguir, tem-se os seguintes elementos:

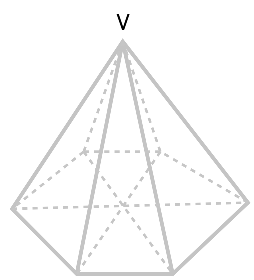


Base: o polígono convexo R.
Arestas da base: os lados AB, BC, CD, DE, EA do polígono.
Arestas laterais: os segmentos VA, VB, VC, VD, VE.
Faces laterais: os triângulos VAB, VBC, VCD, VDE, VEA.
Altura: distância h do ponto V ao plano.

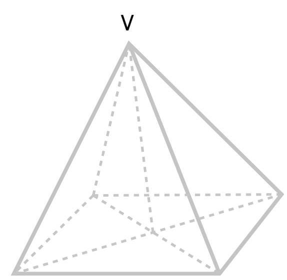
5.5.2 Classificação

Uma pirâmide é reta quando a projeção ortogonal do vértice coincide com o centro do polígono da base.

Toda pirâmide reta, cujo polígono da base é regular, recebe o nome de pirâmide regular. Ela pode ser triangular, quadrangular, pentagonal etc., conforme sua base, seja, respectivamente, um triângulo, um quadrilátero, um pentágono etc.



Pirâmide regular hexagonal



Pirâmide regular quadrangular

5.5.3 Áreas

Em uma pirâmide, temos as seguintes áreas:
Área lateral (AL): reunião das áreas das faces laterais.
Área da base (AB): área do polígono convexo (base da pirâmide).
Área total (AT): união da área lateral com a área da base.

$$\boxed{A_T = A_L + A_B}$$

Para uma pirâmide regular, temos:

$$V_L = n \cdot \frac{bg}{2}\ A_b = pa$$

Em que:
- **b** é a aresta;
- **g** é o apótema;
- **n** é o número de arestas laterais;
- **p** é o semiperímetro da base;
- **a** é o apótema do polígono da base.

M
A
T
E
M
Á
T
I
C
A